Théorème de Witt

<u>Théorème :</u> Soient (E,q), (F,φ), (G,ψ) trois espaces quadratiques réguliers. Alors $(E,q)\perp(F,\varphi)$ est isomorphe à $(E,q)\perp(G,\psi)$ (en tant qu'espaces quadratiques) si et seulement si (F,φ) est isomorphe à (G,ψ).

<u>Démonstration :</u>

• <u>$\Leftarrow$:</u> On suppose (F,φ) isomorphe à (G,ψ). On fixe $u : F \longrightarrow G$ un isomorphisme linéaire tel que $\varphi = \psi\circ u$. On pose $v : \begin{array}{ccc} E\oplus F & \longrightarrow & E\oplus G \\ (x,y) & \longmapsto & (x,u(y)) \end{array}$,

qui est un isomorphisme linéaire. Soit $(x,y)\in E\oplus F$.

On a
$$\begin{aligned}(q\perp\psi)\circ v(x,y) &= (q\perp\psi)(x,u(y))\\ &= q(x) + \psi\circ u(y)\\ &= q(x) + \varphi(y) = (q\perp\varphi)(x,y)\end{aligned}$$

ce qui donne $(q\perp\psi)\circ v = q\perp\varphi$. Les espaces quadratiques $(E,q)\perp(F,\varphi)$ et $(E,q)\perp(G,\psi)$ sont donc isomorphes.

• <u>$\Rightarrow$:</u> On raisonne par récurrence sur $n := \dim E$.

- <u>$n=1$:</u> On suppose $(E,q)\perp(F,\varphi)$ et $(E,q)\perp(G,\psi)$ isomorphes, et on fixe $e_1\in E$ non nul, de sorte que $E = Ke_1$. On fixe ensuite $(e_2,\dots,e_m)$ une base φ-orthogonale de F.

La famille $(e_1,e_2,\dots,e_m)$ est alors une base $(q\perp\varphi)$-orthogonale de $E\oplus F$.

Les espaces quadratiques $(E,q)\perp(F,\varphi)$ et $(E,q)\perp(G,\psi)$ étant isomorphes, on fixe un isomorphisme linéaire $u : E\oplus F \longrightarrow E\oplus G$ tel que $q\perp\varphi = (q\perp\psi)\circ u$. Pour tout $i\in[\![1,m]\!]$, on pose $v_i = u(e_i)$. La famille $(v_1,\dots,v_m)$ est une base $(q\perp\psi)$-orthogonale de $E\oplus G$.

On a $(q\perp\psi)(e_1) = q(e_1) = (q\perp\varphi)(e_1) = (q\perp\psi)(v_1) \neq 0$.

Par identité du parallélogramme, on a donc :

$$\begin{aligned}(q\perp\psi)(e_1-v_1) + (q\perp\psi)(e_1+v_1) &= 2\,\big((q\perp\psi)(e_1) + (q\perp\psi)(v_1)\big)\\ &= 4\,(q\perp\psi)(e_1) \neq 0\end{aligned}$$

On a donc, par exemple, $(q \perp \psi)(e_1 - v_1) \neq 0$.

On pose alors
$$s : \begin{array}{ccc} E \oplus G & \longrightarrow & E \oplus G \\ x & \longmapsto & x - \dfrac{2\, b_{q\perp\psi}(e_1 - v_1, x)}{b_{q\perp\psi}(e_1 - v_1, e_1 - v_1)}\,(e_1 - v_1) \end{array}$$

On a $s(e_1 - v_1) = v_1 - e_1$ et s fixe l'hyperplan orthogonal à $e_1 - v_1$, donc $s \in O(q \perp \psi)$.

De plus, $b_{q\perp\psi}(e_1 - v_1, e_1 + v_1) = (q\perp\psi)(e_1) - (q\perp\psi)(v_1) = 0$,

donc $s(e_1 + v_1) = e_1 + v_1$, ce qui donne $s(e_1) = v_1$. Donc s est une isométrie envoyant $e_1^\perp = G$ sur $v_1^\perp = \mathrm{Vect}(v_2, \dots, v_m)$.

Finalement, $s^{-1} \circ u$ envoie $F = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_m)$ sur G et vérifie $\varphi = \psi \circ s^{-1} \circ u$, ce qui prouve que les espaces quadratiques (F, φ) et (G, ψ) sont isomorphes.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que, pour tout espace quadratique régulier $(V, \tilde{q})$ de dimension n si les espaces quadratiques $(V, \tilde{q}) \perp (F, \varphi)$ et $(V, \tilde{q}) \perp (G, \psi)$ sont isomorphes, alors les espaces quadratiques (F, φ) et (G, ψ) sont isomorphes.

Soit (E, q) un espace quadratique régulier de dimension $n+1$. On suppose les espaces quadratiques $(E, q) \perp (F, \varphi)$ et $(E, q) \perp (G, \psi)$ isomorphes.

Soit $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$. On pose $V = x^\perp$, qui est de dimension n (car q est non dégénérée). On a $(E, q) = (Kx, q_{|Kx}) \perp (V, q_{|V})$.

Les espaces quadratiques $(Kx, q_{|Kx}) \perp (V, q_{|V}) \perp (F, \varphi)$ et $(Kx, q_{|Kx}) \perp (V, q_{|V}) \perp (G, \psi)$ sont donc isomorphes. Le cas $n = 1$ permet alors d'affirmer que les espaces quadratiques $(V, q_{|V}) \perp (F, \varphi)$ et $(V, q_{|V}) \perp (G, \psi)$ sont isomorphes (car $(Kx, q_{|Kx})$ est régulier). Mais $(V, q_{|V})$ est régulier, donc (F, φ) et (G, ψ) sont isomorphes par hypothèse de récurrence.